数理解析研究所講究録 1477 巻 2006 年 112-117

離散型需要をもつ競合的在庫モデルについて

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1　はじめに

既存研究においては，連続的時刻で発生する需要に対処する競合的在庫問題を扱った．客数が非常に多い商品に対しては近似的にこのようなモデルで表現することが可能であるが，たいていの商品では，離散的な時刻で離散量の需要が発生し，各需要量は他の購入者の需要量とは独立に購入されるものである．本研究では，1期間の計画期間に対して離散的な時刻で需要が発生する2者競合的在庫問題について考える．目的は各プレーヤにおいて発注，在庫維持，不足によるペナルティ，販売に伴う総期待費用を最小にするような戦略に対する Nash 平衡を求めることである．

2　モデル

2人のプレーヤ (Player 1, Player 2) における次のような仮定をもつ1期間競合的在庫問題を扱う：両プレーヤの在庫レベルは0から出発する．期間中の需要に対応するために，Player l $(l=1,2)$ は期首に商品を発注し，在庫レベルが z_l になるように補充する．期間中の各プレーヤの発注は期首のみである．需要は期間中の離散的な時刻で発生する．どちらかのプレーヤに初めて訪れる客の分布は以下のようである：Player 1 には，時刻 s_i $(i=1,2,\ldots,m)$ に量 a_i の需要がそれぞれ発生する．Player 2 には，時刻 t_j $(j=1,2,\ldots,n)$ に量 b_j の需要がそれぞれ発生する．もし，あるプレーヤの手持ち在庫が無くなり，その後もそのプレーヤに需要が発生した時には，それらの需要はすべて他方のプレーヤに再配分される．再配分により必要とされる移動時間（タイムラグ）を λ，本モデルにおける計画期間長は両プレーヤ共通の t とする．また，$0\le s_1<s_2<\cdots<s_m\le t-\lambda$, $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le t-\lambda$ を仮定する．この仮定は，再配分される需要も含めたすべての需要が計画期間中に発生することを与えている．販売の過程において，新規の需要と再配分された需要が同時に発生した場合には，前者を優先するものとする．

Player l $(l=1,2)$ に対して，c_l, h_l, p_l, r_l をそれぞれ単位製品当たりの発注費用，単位時間単位製品当たりの在庫維持費用，単位時間単位製品当たりの品切れ損失費用，単位製品当たりの販売価格とする．目的は各プレーヤにおいて発注，在庫維持，不足によるペナルティ，販売に伴う総期待費用を最小にするような戦略に対する Nash 平衡を求めることである．

3　費用関数

この問題の費用関数を導出するにあたり，いくつかの状況を考える必要がある．

(I) 両プレーヤ共に初めて訪れるすべての客に対して即座に商品を供給することができ，時刻 t までに不足を生じないような状況について考える．これは，$z_1\ge\sum_{i=1}^m a_i$，$z_2\ge\sum_{j=1}^n b_j$ の場合である．

任意の時刻 T における Player 1 の在庫レベル $Q_1(T)$ は

$$Q_1(T)=z_1-\sum_{k=1}^{i}a_k,\quad s_i\le T<s_{i+1},\ i=0,1,2,\ldots,m \tag{1}$$

で表される．そこで $s_0=0, s_{m+1}=t$ であり，$\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ である．このとき，Player 1 の期平均総費用 $C_1(z_1,z_2)$ は

$$C_1(z_1,z_2) = c_1 z_1 + h_1\left[z_1 - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}(t-s_k)a_k\right] - r_1\sum_{k=1}^{m} a_k \tag{2}$$

となる．

Player 1 と同様に，時刻 T における Player 2 の在庫レベル $Q_2(T)$ は

$$Q_2(T) = z_2 - \sum_{k=0}^{j} b_k, \quad t_j \le T < t_{j+1},\ j=0,1,2,\dots,n \tag{3}$$

で表される．そこで $t_0=0, t_{n+1}=t$ であり，$\sum_{k=1}^{0} b_k = 0$ である．このとき，Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$C_2(z_1,z_2) = c_2 z_2 + h_2\left[z_2 - \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n}(t-t_k)b_k\right] - r_2\sum_{k=1}^{n} b_k \tag{4}$$

となる．

(II) Player 1 は需要に対して十分な量の商品を確保しておらず，計画期間の途中で不足を起こすが，その不足により発生した再配分を Player 2 がすべて満たす場合について考える．

Player 1 は，時刻 s_{i_2} に発生した需要により不足に達したとする．つまり，s_{i_2} は Player 1 の在庫レベルが負に達した最初の時刻である．また，時刻 $s_{i_2}+\lambda$ 以前に起こる再配分を除いた Player 2 での最後の需要発生時刻を t_{j_2} とおくと，$t_{j_2} < s_{i_2}\lambda < t_{j_2+1}$ である．これは，$\sum_{k=1}^{i_2-1} a_k \le z_1 < \sum_{k=1}^{i_2} a_k, i_3 = 1,2,\dots,m,\ z_1+z_2-\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \ge 0$ の場合である．

任意の時刻 T における Player 1 の在庫レベル $Q_1(T)$ は (1) 式で表される．この状況における Player 1 の期平均総費用 $C_1(z_1,z_2)$ は

$$\begin{aligned} C_1(z_1,z_2) &= c_1 z_1 + h_1\left[\frac{s_{i_2}}{t}z_1 - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{i_2-1}(s_{i_2}-s_k)a_k\right] \\ &\quad + p_1\left[\frac{1}{t}(t-s_{i_2})\left(\sum_{k=1}^{s_{i_2}} a_k - z_1\right) + \frac{1}{t}\sum_{k=i_2+1}^{m}(t-s_k)a_k\right] - r_1 z_1 \end{aligned} \tag{5}$$

となる．

時刻 T における Player 2 の在庫レベル $Q_2(T)$ は

$$Q_2(T) = \begin{cases} z_2 - \sum_{k=0}^{j} b_k, & t_j \le T < t_{j+1},\ j=0,1,2,\dots,j_2-1 \\ z_2 - \sum_{k=0}^{j_2} b_k, & t_{j_2} \le T < s_{i_2}+\lambda \\ z_1+z_2-\sum_{k=1}^{j_2} b_k - \sum_{k=1}^{i_2} a_k, & s_{i_2}+\lambda \le T < \min\{t_{j_2+1}, s_{i_2+1}+\lambda\} \\ z_1+z_2-\sum_{k=1}^{j} b_k - \sum_{k=1}^{i} a_k \text{の形}, & \min\{t_{j_2+1}, s_{i_2+1}+\lambda\} \text{ 以降の任意の時刻} \end{cases} \tag{6}$$

で表される．そこで，最後の行の表現は各プレーヤにおける需要発生時刻の順列に依存する．この状況における Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$\begin{aligned} C_2(z_1,z_2) &= c_2 z_2 + h_2\left[z_2 - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}(t-t_k)b_k - \frac{1}{t}(t-s_{i_2}-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{i_2} a_k - z_1\right)\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{t}\sum_{k=i_2+1}^{m}(t-s_k-\lambda)a_k\right] - r_2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{m} a_k - z_1\right) \end{aligned} \tag{7}$$

となる．

(III) Player 1 が先に不足の状態に達し，Player 2 は自身への新規需要により不足の状態に突入する場合について考える．

Player 1 は，時刻 s_{i_3} に発生した新規需要により品切れの状態に達し，その後，Player 2 が，時刻 t_{j_3} に発生した新規需要により品切れの状態に達したとする．この状況において 2 つの場合が考えられる．

(III-1) $s_{i_3}+\lambda<t_{j_3}$ のとき

Player 1 から再配分される需要の中で，t_{j_3} の直前の時刻を $s_{i'_3-1}+\lambda$ とおくと，時刻 $s_{i_3},\dots,s_{i'_3-1}$ に Player 1 から再配分された需要は Player 2 により満たされるが，$s_{i'_3},\dots,s_m$ に再配分された需要は Player 2 でも満たされない．また，時刻 $t_{j_3},\dots,t_n$ に Player 2 から再配分された需要は，すでに Player 1 でも在庫不足の状態に至っているため，Player 1 でも満たされない．これは，$\sum_{k=1}^{i_3-1}a_k\le z_1<\sum_{k=1}^{i_3}a_k, i_3=1,2,\dots,m,\ z_1+z_2-\sum_{k=1}^{j_3-1}b_k-\sum_{k=1}^{i'_4-1}a_k\ge 0,\ z_1+z_2-\sum_{k=1}^{j_3}b_k-\sum_{k=1}^{i'_4-1}a_k<0$ の場合である．

この状況における Player 1 の期平均総費用 $C_1(z_1,z_2)$ は

$$
\begin{aligned}
C_1(z_1,z_2) &= c_1z_1+h_1\left[\frac{s_{i_3}}{t}z_1-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{i_3-1}(s_{i_3}-s_k)a_k\right]+p_1\left[\frac{1}{t}(t-s_{i_3})(\sum_{k=1}^{s_{i_3}}a_k-z_1)+\frac{1}{t}\sum_{k=i_3+1}^{m}(t-s_k)a_k\right.\\
&\left.+\frac{1}{t}(t-t_{j_3}-\lambda)(\sum_{k=1}^{j_3}b_k+\sum_{k=i_3}^{i'_3-1}a_k-z_2)+\frac{1}{t}\sum_{k=j_3+1}^{n}(t-t_k-\lambda)b_k\right]-r_1z_1 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる．

一方，Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$
\begin{aligned}
C_2(z_1,z_2) &= c_2z_2+h_2\left[\frac{t_{j_3}}{t}z_2-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{j_3-1}(t_{j_3}-t_k)b_k-\frac{1}{t}(t_{j_3}-s_{i_3}-\lambda)(\sum_{k=1}^{i_3}a_k-z_1)\right.\\
&\left.-\frac{1}{t}\sum_{k=i_3+1}^{i'_3-1}(t_{j_3}-s_k-\lambda)a_k\right]+p_2\left[\frac{1}{t}(t-t_{j_3})(\sum_{k=1}^{j_3}b_k+\sum_{k=1}^{i'_3-1}a_k-z_1-z_2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{t}\sum_{k=i'_3}^{m}(t-s_k-\lambda)a_k+\frac{1}{t}\sum_{k=j_3+1}^{n}(t-t_k)b_k\right]-r_2z_2 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

となる．

(III-2) $s_{i_3}+\lambda\ge t_{j_3}$ のとき

この場合には，Player 1 から Player 2 へ再配分される需要は，Player 2 でも満たされない．これは，$\sum_{k=1}^{i_3-1}a_k\le z_1<\sum_{k=1}^{i_3}a_k, i_3=1,2,\dots,m,\ \sum_{k=1}^{j_3-1}b_k\le z_2<\sum_{k=1}^{j_3}b_k$ の場合である．Player 1 における費用関数は (III-1) と同じである．

この状況における Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$
\begin{aligned}
C_2(z_1,z_2) &= c_2z_2+h_2\left[\frac{t_{j_3}}{t}z_2-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{j_3-1}(t_{j_3}-t_k)b_k\right]+p_2\left[\frac{1}{t}(t-t_{j_3})(\sum_{k=1}^{j_3}b_k-z_2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{t}\sum_{k=i_3+1}^{m}(t-s_k-\lambda)a_k+\frac{1}{t}\sum_{k=j_3+1}^{n}(t-t_k)b_k+\frac{1}{t}(t-s_{i_3}-\lambda)(\sum_{k=1}^{i_3}a_k-z_1)\right]\\
&-r_2z_2 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．

時刻 t_{j_3} において，Player 1 から再配分された需要と Player 2 への新規需要がある場合，後者の方を優先することにより，(III-2) に帰着することができる．

(IV) Player 2 が先に不足の状態に達し，Player 2 は Player 1 からの再配分による需要により不足の状態に突入する場合について考える．

Player 1 は，時刻 s_{i_4} に発生した新規需要により品切れの状態に達し，その後，Player 2 は，時刻 $s_{i'_4}+\lambda$ に Player 1 から再配分された需要により品切れの状態に達したとする．時刻 $s_{i'_4}+\lambda$ 以前に起こる再配分を除いた Player 2 での最後の需要発生時刻を t_{j_4-1} とおくと，時刻 $t_1,\dots,t_{j_5-1}$ に発生した需要は Player 2 で満たされるが，時刻 $t_{j_5},\dots,t_n$ に発生した需要は満たされず，Player 1 に再配分される．しかし，Player 1 ではすでに品切れの状態に達しているため，再配分されても供給されることはない．この状況においても 2 つの場合が考えられる．

(IV-1) $i_4=i'_4$ のとき

これは，$\sum_{k=1}^{i_4-1}a_k\le z_1<\sum_{k=1}^{i_4}a_k, i_4=1,2,\dots,m$, $z_2-\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k\ge 0$, $z_1+z_2-\sum_{k=1}^{i_4}a_k-\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k<0$ の場合である．

この状況における Player 1 の期平均総費用 $C_1(z_1,z_2)$ は

$$\begin{aligned}C_1(z_1,z_2) &= c_1z_1+h_1\left[\frac{s_{i_4}}{t}z_1-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{i_4-1}(s_{i_4}-s_k)a_k\right]+p_1\left[\frac{1}{t}(t-s_{i_4})(\sum_{k=1}^{s_{i_4}}a_k-z_1)\right.\\ &\left.+\frac{1}{t}\sum_{k=i_4+1}^{m}(t-s_k)a_k+\frac{1}{t}\sum_{k=j_4}^{n}(t-t_k-\lambda)b_k\right]-r_1z_1 \qquad (11)\end{aligned}$$

となる．

一方，Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$\begin{aligned}C_2(z_1,z_2) &= c_2z_2+h_2\left[\frac{s_{i'_4}+\lambda}{t}z_2-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{j_4-1}(s_{i'_4}+\lambda-t_k)b_k\right]\\ &+p_2\left[\frac{1}{t}(t-s_{i'_4}-\lambda)(\sum_{k=1}^{i_4}a_k+\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k-z_1-z_2)+\frac{1}{t}\sum_{k=j_4}^{n}(t-t_k)b_k\right.\\ &\left.+\frac{1}{t}\sum_{k=i_4+1}^{m}(t-s_k-\lambda)a_k\right]-r_2z_2 \qquad (12)\end{aligned}$$

となる．

(IV-2) $i_4<i'_4$ のとき

この場合には，Player 1 から Player 2 へ再配分される需要のうち，Player 1 で時刻 $s_{i_4},\dots,s_{i'_4}-1$ に発生した需要はすべて Player 2 により満たされる．また，時刻 $s_{i'_4}$ に発生した需要のうちの一部のみ満たされ，その後に Player 1 で発生した需要は満たされることがない．これは，$\sum_{k=1}^{i_4-1}a_k\le z_1<\sum_{k=1}^{i_4}a_k, i_4=1,2,\dots,m$, $z_1+z_2-\sum_{k=1}^{i'_4-1}a_k-\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k\ge 0$, $z_1+z_2-\sum_{k=1}^{i'_4}a_k-\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k<0$ の場合である．Player 1 における費用関数は (IV-1) と同じである．

Player 2 の期平均総費用 $C_2(z_1,z_2)$ は

$$\begin{aligned}C_2(z_1,z_2) &= c_2z_2+h_2\left[\frac{s_{i'_4}+\lambda}{t}z_2-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{j_4-1}(s_{i'_4}+\lambda-t_k)b_k-\frac{1}{t}\sum_{k=i_4+1}^{i'_4-1}(s_{i'_4}-s_k)a_k\right.\\ &\left.-\frac{1}{t}(s_{i'_4}-s_{i_4})(\sum_{k=1}^{i_4}a_k-z_1)\right]+p_2\left[\frac{1}{t}(t-s_{i'_4}-\lambda)(\sum_{k=1}^{i'_4}a_k+\sum_{k=1}^{j_4-1}b_k-z_1-z_2)\right.\\ &\left.+\frac{1}{t}\sum_{k=j_4}^{n}(t-t_k)b_k+\frac{1}{t}\sum_{k=i'_4+1}^{m}(t-s_k-\lambda)a_k\right]-r_2z_2 \qquad (13)\end{aligned}$$

となる.

上記の (II),(III),(IV) は Player 2 より Player 1 が先に品切れの状態に達する状況であり，２人のプレーヤの役割りを入れ替えた状況についても考慮する必要がある.

4 結果

前節では，すべての場合における費用関数を求めた．関数を見てわかるとおり，いずれも z_1, z_2 の線形関数であることがわかる．よって，これらの関数から簡単に最適解を求めることができる．最適解の結果は以下のとおりである.

$\alpha_i = \frac{r_i - c_i + p_i}{h_i + p_i}$，$i = 1, 2$ とする.

(I) $z_1^* = \sum_{k=1}^{m} a_k$; $z_2^* = \sum_{k=1}^{n} b_k$

(II) $s_{i_2} \geq \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_2-1} a_k$; $s_{i_2} < \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_2} a_k$;

$z_2^* = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k - z_1$

(III-1) $s_{i_3} \geq \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_3-1} a_k$; $s_{i_3} < \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_3} a_k$;

$t_{j_3} \geq \alpha_2 t \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_3-1} b_k + \sum_{k=1}^{i_3'-1} a_k - z_1$; $t_{j_3} < \alpha_2 t \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_3} b_k + \sum_{k=1}^{i_3'-1} a_k - z_1$

(III-2) $s_{i_3} \geq \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_3-1} a_k$; $s_{i_3} < \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_3} a_k$;

$t_{j_3} \geq \alpha_2 t \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_3-1} b_k$; $t_{j_3} < \alpha_2 t \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_3} b_k$

(IV-1) $s_{i_4} \geq \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_4-1} a_k$; $s_{i_4} < \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_4} a_k$;

$s_{i_4'} \geq \alpha_2 t - \lambda \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_4-1} b_k$; $s_{i_4'} < \alpha_2 t - \lambda \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_4-1} b_k + \sum_{k=1}^{i_4} a_k - z_1$

(IV-2) $s_{i_4} \geq \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_4-1} a_k$; $s_{i_4} < \alpha_1 t \Rightarrow z_1^* = \sum_{k=1}^{i_4} a_k$;

$s_{i_4'} \geq \alpha_2 t - \lambda \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_4-1} b_k + \sum_{k=1}^{i_5'-1} a_k - z_1$; $s_{i_4'} < \alpha_2 t - \lambda \Rightarrow z_2^* = \sum_{k=1}^{j_4-1} b_k + \sum_{k=1}^{i_4'} a_k - z_1$

以上の結果および目的関数の形を考慮すると，純戦略における Nash 平衡はこれらの点のいずれかであることがわかる.

5 最後に

本研究では，離散的需要に対する２企業間の在庫管理戦略について考察した．本研究のように需要発生時刻およびその需要量が既知である場合には，簡単に戦略を求めることができる．また，部分的バックログ等の仮定に置き換えたモデルについても同様にして Nash 平衡を求めることができる．現実的には，需要に関する情報がないことが多く，このような場合については今後の研究課題とする.

参考文献

[1] J. Bryant, Competitive equilibrium with price setting firms and stochastic demand, *International Economic Review*, **21**, 619–626, (1980).

[2] D.P. Heyman and M.J. Sobel, *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science* **2**, Elsevier Science Publishers, North-Holland, (1990).

[3] H. Hohjo, A competitive inventory model with the customer's general choice probability, *Computers & Mathematics with Applications*, **41** (3-4), 523–530, (2001).

[4] H. Hohjo and Y. Teraoka, On a competitive inventory model with a customer's choice probability, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **43** (3), 355–364, (2000).

[5] H. Hohjo and Y. Teraoka, A duopolistic inventory problem including the possibility that the customers give up purchasing the merchandise, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **55** (2), 361–367, (2002).

[6] H. Hohjo and Y. Teraoka, A competitive inventory model with reallocation on a plane Market, *Mathematical and Computer Modelling*, **38** (11-13), 1191–1201, (2003).

[7] M.Kodama, *The Basis of Production and Inventory Control Systems* (in Japanese), Kyushu University Press, Japan, (1996).

[8] S.A. Lippman and K.F. McCardle, The competitive newsboy, *Operations Research*, **45** (1), 54–65, (1997).

[9] M. Parlar, Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands, *Naval Research Logistics*, **35**, 397–409, (1988).